Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
Septiembre - Diciembre 2000

Nombre: ____________________

Carnet: ____________ Sección: ____

MA-3111—Segundo Parcial —

1. Sea $f(x) = \pi - x$ una función definida en el intervalo $[0, \pi]$. Considere su desarrollo en series de Fourier seno
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx).$$
   a) (3 pts) Calcule la suma $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2$.
   b) (4 pts) Halle los coeficientes b_n.
   c) (3 pts) Calcule la suma $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$.

2. Considere el conjunto de funciones $\{p_0, p_1, p_2\}$ definidas en el intervalo $[-2, 2]$ donde
$$\begin{aligned} p_0(x) &= 1, \\ p_1(x) &= x, \\ p_2(x) &= -4/3 + x^2. \end{aligned}$$
   a) (3pts) Muestre que estos polinomios forman un conjunto ortogonal de funciones $L^2(-2, 2)$.
   b) (5 pts) Hallar los coeficientes a_0, a_1, y a_2 para que la función
$$x^3 - a_0 p_0(x) - a_1 p_1(x) - a_2 p_2(x)$$
   sea ortogonal a $p_0(x), p_1(x)$ y $p_2(x)$ en $L^2(-2, 2)$.
   Observación: Si $f, g : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ entonces su producto interno está dado por
$$\langle f, g \rangle = \int_{-2}^{2} f(x) g(x) dx$$

3. Considere la ecuación de onda
$$u_{tt} - 4u_{xx} = 0 \quad t > 0,\ x \in (0, 1)\,,$$
que satisface las condiciones de borde
$$\begin{aligned} u_x(0, t) + u(0, t) &= 0 \\ u_x(1, t) + u(1, t) &= 0 \end{aligned}$$
   a) (2pts) Hallar todas las funciones $T(t)$ tales que $u(x, t)$ tales que $u(x, t) = T(t)e^{-x}$ es una solución del problema planteado.

b) (6 pts) Hallar todas las funciones $u(x,t) = X(x)T(t)$ con

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{4T} = -\pi^2 \, ,$$

que son soluciones no triviales para el problema planteado.

c) (4 pts)Usando las partes (a) y (b), hallar la solución del problema planteado que satisfaga además, las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \pi \cos(\pi x) - \operatorname{sen}(\pi x), \\ u_1(x,0) &= 4e^{-x.} \end{aligned}$$

4. (8 puntos) Hallar las antitransformadas de Laplace de las siguientes:

a) $\dfrac{z^2 e^{-5z}}{z^2-9}$; *b*) $\dfrac{z}{z^2+a^2}$; *c*) $\dfrac{1}{z^2+a^2}$.